แผนการทดลอง Lattice

โดยกลุ่มวิจัยและวิเคราะห์ทางสถิติงานวิจัยเกษตร

ดังที่ได้ศึกษาการวางแผนแบบบล็อก (Randomized complete block design) มาแล้วนั้นจะเห็นได้ว่าการกำหนดทรีทเมนต์ให้แต่ละบล็อกนั้นจะมีทรีทเมนต์ทุกๆ ทรีทเมนต์ ดังนั้นการวางแผนการทดลองดังกล่าวจะเป็นการวางแผนการทดลองแบบ บล็อกสมบูรณ์ (Complete block design) แต่ในความเป็นจริงบางครั้งจำนวนทรีทเมนต์อาจจะมีเป็นจำนวนมากควรจะเปลี่ยนเป็นการวานแผนแบบอื่นๆ ที่เคยศึกษามาแล้ว เช่น ถ้ามี 5 ทรีทเมนต์อาจจะวางแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ เพื่อให้เกิดจำนวนซ้ำ ดังนั้นจะได้จำนวนหน่วยทดลองในกรณีนี้เป็น 25 หน่วย หรือถ้ามี 8 ทรีทเมนต์จำนวนหน่วยทดลองจะเป็น 64 หน่วย จะเห็นได้ว่าจำนวนหน่วยทดลองจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วถ้ามีจำนวนทรีทเมนต์เพิ่มขึ้นทำให้การวางแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ไม่นิยมใช้เมื่อทรีทเมนต์มีมากกว่า 8 ทรีทเมนต์

แต่ถ้าจะใช้การทดลองแบบบล็อกแทนเมื่อทรีทเมนต์มีจำนวนมากก็จะทำให้ความสม่ำเสมอภายในบล็อกยากขึ้นทำให้เกิดความผิดพลาดมากขึ้นและการควบคุมความผิดพลาดจากการทดลองยากขึ้นด้วย เมื่อเป็นเช่นนี้การวางแผนการทดลองแบบบล็อกสมบรูณ์จึงไม่ถูกนำมาใช้เลย ผู้ทดลองจะวางแผนการทดลองโดยการแบ่งบล็อก ขนาดเล็กๆ และแต่ละบล็อกจะมีจำนวนทรีทเมนต์ไม่เหมือนกัน ดังนั้นการทดลองแบบนี้จะเรียกว่าการทดลองแบบบล็อกไม่สมบรูณ์ (Incomplete block) หรือเรียกว่าการทดลองแบบ Lattice

แผนการทดลองดังที่กล่าวมานี้จะใช้มากในการทดลองทางเกษตรส่วนการทดลองจะมีจำนวนซ้ำเท่าใดก็ได้ซึ่งก็จะขึ้นอยู่กับผู้ดำเนินการทดลองและงบประมาณที่มีอยู่ ดังนั้นเมื่อดำเนินการทดลองแบบ Lattice แล้วถ้ามีการทดลองซึ่งมี 2 ซ้ำก็จะเรียกการทดลองแบบนี้ว่า simple lattice, ถ้ามี 3 ซ้ำก็จะเรียกว่า triple lattice, ถ้ามี 4 ซ้ำก็จะเรียกว่า quadruple lattice เป็นต้น

ขั้นตอนต่างๆในการวางแผนการทดลองแบบ Lattice

การวางแผนการทดลองแบบ Lattice นั้นมีขั้นในการดำเนินงานแยกออกเป็น 3 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งพื้นที่การทดลองออกเป็น “r” ซ้ำแต่ละซ้ำจะมีจำนวนทรีทเมนต์ “t” ทรีทเมนต์หลังจากนั้นจะแบ่งซ้ำออกเป็นบล็อกไม่สมบูรณ์ k = t บล็อกและแต่ละบล็อกจะมีทรีทเมนต์ k ทรีทเมนต์ ดังนั้นจำนวนหน่วยทดลองทั้งหมดจะเป็น $rt = rk^2$ หน่วย และจำนวน rk บล็อกไม่สมบูรณ์จะเปรียบเสมือน rk บล็อกในการวางแผนการทดลองแบบบล็อก ส่วนการกำหนดจำนวนซ้ำในแต่ละการทดลองนั้นจะเท่ากับจำนวนบล็อกบวก 1 เสมอนั้นคือจำนวนซ้ำจะเป็น k+1 ซ้ำ

ขั้นที่ 2 เลือกแผนการทดลองแบบใดก็ได้จากตารางในหนังสือ Experimental Designs โดย W.G. Cochran and G.M. Cox ซึ่งการเลือกแบบใดจะขึ้นอยู่กับจำนวนทรีทเมนต์ที่ต้องการศึกษา

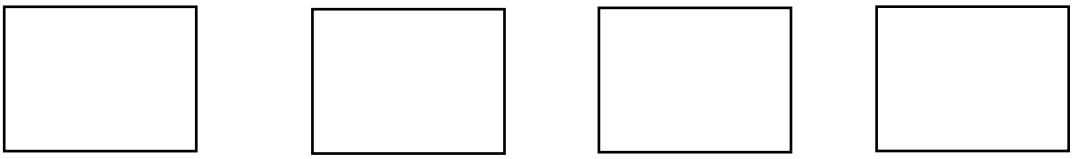
ขั้นที่ 3 การเลือกหน่วยทดลองจะดำเนินตามขั้นตอนดังนี้

ก. สุ่มบล็อกภายในแต่ละซ้ำ

ข. สุ่มทรีทเมนต์ให้แต่ละบล็อกภายในแต่ละซ้ำ

เช่นถ้าการทดลองมี 9 ทรีทเมนต์ ขั้นดำเนินการวางแผนการทดลองจะเป็นดังนี้

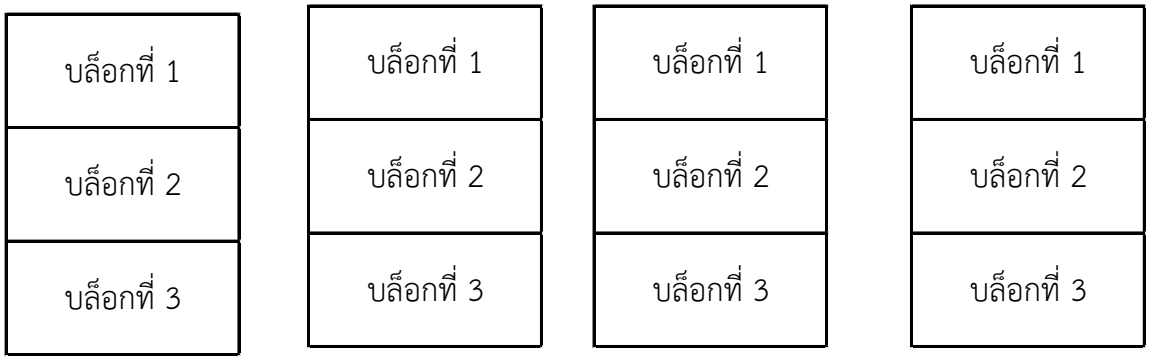
1. แบ่งพื้นที่การทดลองออกเป็น $\sqrt{9}$ + 1 = 4 ซ้ำ แต่ละซ้ำจะมี 9 ทรีทเมนต์ดังแผนภาพต่อไปนี้



ซ้ำที่ 1 ซ้ำที่ 2 ซ้ำที่ 3 ซ้ำที่ 4

รูปที่ 1 จำนวนซ้ำในการทดลองแบบ Lattice มี 9 ทรีทเมนต์

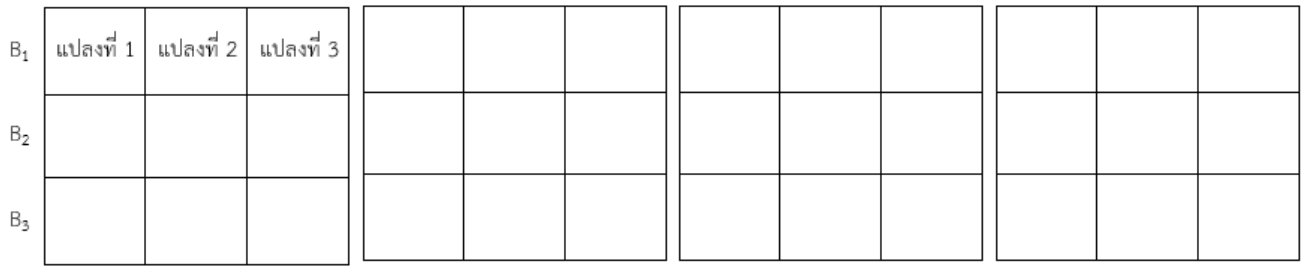
และจำนวนบล็อกในแต่ละซ้ำจะเป็น $\sqrt{9}$ = 3 บล็อก ดังแผนภาพที่ 2



ซ้ำที่ 1 ซ้ำที่ 2 ซ้ำที่ 3 ซ้ำที่ 4

รูปที่ 2 บล็อกในแต่ละซ้ำ

แปลงทดลองในแผนพื้นฐานจะเป็นดังรูปที่ 3



ซ้ำที่ 1 ซ้ำที่ 2 ซ้ำที่ 3 ซ้ำที่ 4

รูปที่ 3 แปลงทดลองในแต่ละบล็อก

ดังนั้น จากแผนภาพที่แสดงมาแล้วนั้น ขั้นต่อไปของการวานแผนการทดลองคือ

2. เลือกแผนการทดลองใดก็ได้
3. สุ่มซ้ำให้งานสนาม
4. สุ่มบล็อกใส่ลงในแต่ละซ้ำ

เมื่อดำเนินการมาถึงขั้นที่ 4 จะได้แผนภาพการทดลองดังนี้

ซ้ำในแผนพื้นฐาน	ซ้ำในงานสนาม
1	3
2	2
3	4
4	1

เลขที่บล็อกไม่สมบรูณ์ในแผนพื้นฐาน	เลขที่บล็อกไม่สมบรูณ์ในงานสนาม			
	ซ้ำที่ 3	ซ้ำที่ 2	ซ้ำที่ 4	ซ้ำที่ 1
1	3	2	2	1
2	2	1	3	3
3	1	3	1	2

แผนการทดลองทั้งหมดจะเป็นดังตาราง

แผนการทดลองแบบ Lattice มี 9 ทรีทเมนต์

ซ้ำที่ 3		ซ้ำที่ 2		ซ้ำที่ 4		ซ้ำที่ 1	
เลขที่บล็อกไม่สมบรูณ์	ทรีทเมนต์ที่	เลขที่บล็อกไม่สมบรูณ์	ทรีทเมนต์ที่	เลขที่บล็อกไม่สมบรูณ์	ทรีทเมนต์ที่	เลขที่บล็อกไม่สมบรูณ์	ทรีทเมนต์ที่
3	7 8 9	2	2 5 8	2	3 4 8	1	1 6 8
2	4 5 6	1	1 4 7	3	1 5 9	3	3 5 7
1	1 2 3	3	3 6 9	1	2 6 7	2	2 4 9

5. สุ่มทรีทเมนต์ให้แต่ละบล็อกในแต่ละซ้ำ

ดังนั้นแผนการทดลองที่จะต้องปฏิบัติจริงจะเป็นดังนี้

แผนการทดลองเมื่อสุ่มทรีทเมนต์ให้บล็อกจะเป็นดังนี้

ซ้ำที่ 3		ซ้ำที่ 2		ซ้ำที่ 4		ซ้ำที่ 1	
บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่	บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่	บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่	บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่
3	7 8 9	2	2 5 8	2	3 4 8	1	1 6 8
2	4 5 6	1	1 4 7	3	1 5 9	3	3 5 7
1	1 2 3	3	3 6 9	1	2 6 7	2	2 4 9

เมื่อได้บล็อกและทรีทเมนต์ในแต่ละบล็อกแล้วขั้นต่อไปสุ่มทรีทเมนต์ในแต่ละบล็อกให้แปลงทดลองจะได้แผนการทดลองดังต่อไปนี้

แผนภาพการปฏิบัติการทดลองแบบ Lattice มี 9 ทรีทเมนต์

ซ้ำที่ 3		ซ้ำที่ 2		ซ้ำที่ 4		ซ้ำที่ 1	
บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่	บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่	บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่	บล็อกที่	ทรีทเมนต์ที่
3	7 9 8	2	2 8 5	2	8 3 4	1	1 8 6
2	4 5 6	1	7 4 1	3	5 1 9	3	5 7 3
1	3 2 1	3	9 3 6	1	6 7 2	2	4 2 9

ตัวอย่างที่ 1 การทดลองปุ๋ยในการปลูกข้าวซึ่งมี 16 ทรีทเมนต์ ดังนั้นการทดลองจะเป็น 4 ×4 balance Lattice ซึ่งมี 5 ซ้ำ (4+1) ผลการทดลองจะเป็นดังตาราง

Rep. I

Block					Total
1	(1)	(2)	(3)	(4)	616
	147	152	167	150	
2	(5)	(6)	(7)	(8)	616
	127	155	162	176	
3	(9)	(10)	(11)	(12)	616
	147	100	192	177	
4	(13)	(14)	(15)	(16)	747
	155	195	192	205	
					2,595

Rep. II

Block					Total
5	(1)	(6)	(11)	(16)	646
	155	162	177	152	
6	(5)	(6)	(7)	(8)	654
	182	130	177	166	
7	(9)	(14)	(3)	(8)	626
	137	185	152	152	
8	(13)	(10)	(7)	(4)	681
	185	122	182	192	
					2,607

Rep. III

Block					Total
9	(1)	(9)	(5)	(13)	639
	140	182	165	152	
10	(10)	(2)	(14)	(6)	586
	97	155	192	142	
11	(7)	(15)	(3)	(11)	721
	155	182	192	192	
12	(6)	(8)	(12)	(4)	783
	182	207	232	162	
					2,729

Rep. IV

Block					Total
13	(1)	(4)	(7)	(12)	802
	226	202	175	205	
14	(13)	(2)	(11)	(8)	724
	205	152	180	187	
15	(5)	(10)	(3)	(16)	675
	165	150	200	160	
16	(9)	(6)	(15)	(4)	689
	155	177	185	172	
					2,890

Rep. V

Block					Total
17	(1)	(10)	(15)	(8)	583
	147	112	177	147	
18	(9)	(2)	(7)	(16)	742
	180	206	190	167	
19	(13)	(6)	(3)	(12)	773
	172	212	197	192	
20	(5)	(14)	(11)	(4)	827
	177	220	206	225	
					2,926

การวิเคราะห์จะเป็นดังนี้

1. คำนวณผลรวมของบล็อกและซ้ำดังตารางข้างต้น
2. คำนวณผลรวมของทรีทเมนต์ (T) และผลรวมทั้งหมด (G)
3. แต่ละทรีทเมนต์คำนวณ L_t ซึ่งเป็นผลรวมของทุกๆ บล็อกที่ทรีทเมนต์ t ปรากฏ เช่น

$B_5 = B_{(2)} + B_{(6)} + B_{(9)} + B_{(15)} + B_{(20)}$

$= 616 + 654 + 639 + 675 + 827 = 3441$

ซึ่งผลบวกของ B_t จะเท่ากับ k คูณผลรวมทั้งหมด นั่นคือ

$$4\ (13{,}746) = 54{,}984 = \sum_{t=1}^{16} B_t$$

4. แต่ละทรีทเมนต์จะคำนวณ

$W = kT - (k+1)B_t + G$

ในเมื่อ k = 4

T = ผลรวมของ T_t

B_t = ผลรวมของบล็อกที่ t ทรีทเมนต์ปรากฏ

G = ผลรวมทั้งหมด

เช่น

$W_5 = 4(816) - (4+1)(3411) + 13{,}746$

$= -45$ เป็นต้น

5. สร้างตาราง ANOVA

ตารางที่ 1 คำนวณการปรับค่าและไม่ปรับค่าผลรวมของ treatment สำหรับ 4×4 Balanced Lattice

Treat.	T	B_t	W = 4T-5B_t+G	Adjusted Total ($T'=T+\mu W$)	Adjusted Treat. Mean ($M'=\frac{T'}{5}$)
1	809	3,286	552	829	166
2	794	3,322	312	805	161
3	908	3,411	323	920	164
4	901	3,596	-630	878	176
5	816	3,411	-45	814	163
6	848	3,310	588	896	174
7	864	3,562	-608	842	168
8	865	3,332	546	885	177
9	801	3,312	390	815	163
10	581	3,141	365	594	119
11	946	3,534	-140	941	188
12	971	3,628	-510	953	191
13	869	3,564	-598	848	170
14	994	3,588	-218	986	192
15	913	3,394	428	928	186
16	866	3,593	-755	839	168
Sum	13,746 (G)	54,984	0	-	-

ตารางที่ 2 ตาราง ANOVA

ANOVA

Source of Variation	Degree of freedom	Sum of Squares	Mean Square
Replication	$k = 4$		
Treatment(unadj.)	$k^2-1 = 15$		
Block(adj.)	$k^2-1 = 15$		
Intrablock error	$(k-1)(k^2-1) = 45$		
Treatment(adj.)	$[(k^2-1) = 15]$		
Error	$\{(k-1)(k^2-1) = 45\}$		
Total	$k^2(k+1)-1 = 79$		

6. คำนวณผลบวกกำลังสอง SST, SSR และ SSTr(unadj.)

$$C.F.=\frac{G^2}{(k^2)(k+1)}$$

$$= \frac{(13,746)^2}{4^2(4+1)} = 2,361,906$$

$$SST=\sum X^2 - C.F.$$

$$= [147^2 + 152^2 + \dots + 225^2] - 2,361,906$$

$$= 58,856$$

$$Rep.SS=\frac{\sum (R)^2}{k^2} - C.F.$$

$$= \frac{(2,595)^2+(2,607)^2+\dots+(2,925)^2}{4^2} - 2,361,906$$

$$= 5,946$$

$$SSTr(unadj.) = \frac{\sum T^2}{(k+1)} - C.F.$$

$$= \frac{(809)^2+(794)^2+\dots+(866)^2}{5} - 2,361,906$$

$$= 26,995$$

7. คำนวณ SSB(adj.)

$$\text{SSB(adj.)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} W_i^2}{(k^3)(k+1)}$$

$$= \frac{(552)^2 + (312)^2 + \ldots + (-755)^2}{(64)(5)}$$

$$= 11{,}382$$

8. คำนวณ SSE Intrablock

$$\text{SSE Intrablock} = \text{SST} - \text{SSR} - \text{SSTr(unadj.)} - \text{SSB(adj.)}$$

$$= 58{,}855 - 5{,}946 - 26{,}994 - 11{,}382$$

$$= 14{,}533$$

9. คำนวณ MSB(adj.) และ MSE intrablock

$$\text{MSB(adj.)} = \frac{\text{SSB(adj.)}}{k^2 - 1}$$

$$= \frac{11{,}382}{15} = 759$$

$$\text{MES Intrablock} = \frac{\text{SSE Intrablock}}{(k-1)(k^2-1)}$$

$$= \frac{14{,}533}{(3)(15)} = 323$$

10. สำหรับ Treatment อื่น คำนวณผลรวม Treatment adj T' คือ

$$T' = T + \mu W$$

เมื่อ $\mu = \frac{\text{MSB(adj.)} - \text{MSE Intrablock}}{k^2[\text{MSB(adj.)}]}$

ถ้า intrablock error มากกว่า MSB(adj) จะให้ μ = 0 และไม่จำเป็นต้องปรับค่า ดังนั้น F-test จะมีค่าเป็น $F = \frac{\text{MSTr(unadj.)}}{\text{MSE Intrablock}}$ และสามารถข้ามข้อ 10 – 14 และข้อ 17 ไปได้

แต่สำหรับตัวอย่างนี้ MSE intrablock น้อยกว่า MSB(adj.) ดังนั้นปรับค่า μ โดย

$$\mu = \frac{759 - 323}{16(759)} = 0.0359$$

การปรับค่า treatment ของ treatment ที่ 5 ของตัวอย่างนี้คือ

T_5' = 816+(0.0359)(-45) = 814 ผลการคำนวณของ T' ทั้ง 16 treatment จะแสดงในคอลัมภ์ที่ 5 ของตารางที่ 1

11. สำหรับ treatment อื่น การปรับค่าเฉลี่ย Treatment M' คือ

$$M' = \frac{T'}{k+1}$$

สำหรับตัวอย่างนี้ค่า M'ของ treatment ที่ 5 คำนวณได้ดังนี้

$$M' = \frac{814}{5} = 163$$

ผลของค่า M'ทั้ง 16 treatment จะแสดงในคอลัมภ์สุดท้ายของตารางที่ 1

12. คำนวณค่า MSTr(adj.) โดย

$$\text{MSTr(adj.)} = \left[\frac{1}{(k+1)(k^2-1)}\right]\left[\sum T'^2 - \frac{G^2}{k^2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{(5)(15)}\right]\left\{\left[(829)^2 + (805)^2 + \ldots + (839)^2\right] - \frac{(13,746)^2}{16}\right\}$$

$$= 1,602$$

13. คำนวณค่า MSE โดย

$$\text{MSE} = (\text{MSE Intrablock})(1+k\mu)$$

$$= 323[1+4(0.0359)]$$

$$= 369$$

คำนวณความสอดคล้องของค่า $c\upsilon$ โดย

$$c\upsilon = \frac{\sqrt{\text{MSE}}}{\text{Grand mean}} \times 100$$

$$= \frac{\sqrt{369}}{172} \times 100 = 11.2\%$$

14. คำนวณค่า F สำหรับทดสอบ treatment ดังนี้

$$F = \frac{\text{MSTr(adj.)}}{\text{MES}}$$

$$= \frac{1,602}{369} = 4.34$$

15. เปรียบเทียบค่า F ที่คำนวณได้กับค่า F ที่เปิดจากตาราง degree of freedom ที่ $f_1 = (k^2-1) = 15$ และ $f_2 = (k-1)(k^2-1) = 45$ เนื่องจากค่า F จากการคำนวณมากกว่าค่า F ที่เปิดจากตารางที่ระดับ ดังนั้น treatment แตกต่างที่ระดับความเชื่อมั่น 99 เปอร์เซ็นต์
16. นำค่าที่คำนวณได้จากข้อ 6 – 9 และ 12 – 15 ลงในตาราง ANOVA จะเห็นได้จากตารางที่ 3
17. ประมาณค่าความแม่นยำของการใช้ balanced lattice เมื่อเปรียบเทียบกับการวางแผนแบบ RCB

$$R.E = \frac{100\left[SSB(adj.)+SSE\ Intrablock\right]}{k(k^2-1)(MES)}$$

$$= \frac{100(11,382+14,533)}{(4)(16-1)(369)} = 117\%$$

ตารางที่ 3 ตาราง ANOVA (4×4 Balanced Lattice Design)

Source of Variation	Degree of freedom	Sum of Squares	Mean Square	F	F ที่เปิดจากตาราง	
					5%	1%
Replication	4	5,946				
Treatment(unadj.)	15	26,995				
Block(adj.)	15	11,382	759			
Intrablock error	45	14,533	323			
Treatment(adj.)	(15)	-	1,602	4.34**	1.9	2.47
Error	(45)	-	369			
Total	79	58,856				

[a] $C.V.$ = 11.2%

[b] ** = significant at 1% level

ในกรณีการใช้ balanced lattices design จะเพิ่มความเชื่อถือได้ดีกว่า RCB 17%

การวางแผนการทดลองแบบ Balanced lattice ที่ยกตัวอย่างมานี้เป็นเพียงตัวอย่างเดียว ส่วนกรณีที่เป็น Tripled lattices หรือกรณีอื่นการวิเคราะห์ก็จะคล้ายคลึงกันแต่การคำนวณผลบวกกำลังสองของบล็อกที่ปรับแล้วก็แตกต่างออกไป ดังนั้นถ้าท่านสนใจศึกษาเรื่องนี้ควรจะค้นคว้าจากหนังสือการวางแผนการทดลองทั่วๆไป